



SINIF ÖĞRETMENİ ADAYLARININ GENELLEME SÜRECİNDEKİ BİLİŞSEL YAPILARI: BİR ÖĞRETİM DENEYİ

PRE-SERVICE TEACHERS' COGNITIVE STRUCTURES IN THE PROCESS OF
GENERALIZATION: A TEACHING EXPERIMENT

Dilek TANIŞLI*
Nilüfer Y. KÖSE*

Öz

Cebir öğrenme ve cebirsel düşünme gelişiminin öncülerinden olan genelleme matematiksel düşünme sürecinin temelidir. Örüntüler ise genelleme yeteneğini açığa çıkarmada temel bir adımdır ve oldukça etkilidir. Bu çalışmanın amacı, sınıf öğretmeni adaylarının örüntüleri genellemedeki bilişsel yapılarını ve bu süreçte kullandıkları genelleme tiplerini ortaya koymaktır. Nitel araştırma yaklaşımlarından biri olan öğretim deneyi (teaching experiment) yönteminin kullanıldığı bu çalışmada, odak olarak seçilen 16 sınıf öğretmeni adayı ile ön ve son görüşmeler yapılmış, elde edilen sonuçlar adayların genelleme şemaları ve cebirsel genelleme tipleri olmak üzere iki ana başlıkta tartışılmıştır. Araştırmada ön görüşmelerde aritmetik genelleme ve olgunlaşmamış tümevarım yapan adayların tamamının son görüşmelerde cebirsel genellemeye ulaştıkları, bu süreçte de daha kolay geri çıkarım ve tümevarım muhakemeler gerçekleştirerek farklı ve karmaşık cebirsel genellemelerinde bu döngüyü tekrar ve tekrar yinededikleri görülmüştür. Öğretim deneyinin sonunda gerçekleştirilen son görüşmelerde adayların ağırlıklı olarak görsel yaklaşıma doğru bir eğilim gösterdikleri belirlenmiştir. Ayrıca adayların bu yaklaşımlar altında kullandıkları genelleme stratejilerinin çeşitlendiği, temsil kullanımlarının geliştiği ve değişkenin bilinmeyen anlamından daha çok bağımlı-bağımsız anlamını keşfettikleri saptanmıştır. Sonuç olarak, öğretim deneyi sonucunda öğretmen adaylarının örüntüleri cebirsel olarak genelleyebilir becerilerinin gelişiminin sağlandığı söylenebilir.

Anahtar Kelimeler: Matematik Eğitimi, Cebir, Örüntüler, Genelleme

Abstract

Generalization, which has a pioneering function in the development of learning algebra and algebraic thinking, is the baseline for mathematical thinking process. As an essential step in revealing generalization, patterns are highly effective. The aim of this study is to determine prospective primary school teachers' cognitive structures in generalizing patterns and the types of generalizations they employ in this process. Using qualitative research methods, this study administered a teaching experiment to the participant prospective primary school teachers. Pre and post interviews were conducted with a total of 16 prospective primary school teachers chosen as the focus group and the obtained results were discussed under two main headings: prospective teachers' generalization diagrams and algebraic generalization types. This study found that all of the prospective teachers who performed arithmetic generalization and naive induction in the pre interviews reached algebraic generalization in the post interviews and, by performing easier abduction and inductive reasoning in this process, they repeated this cycle over and over in different and complex algebraic generalizations. The post interviews carried out at the end of the teaching experiment revealed that the prospective teachers showed a clear tendency toward the visual approach. The study also found that the generalization strategies used by the prospective teachers under these approaches were diversified, their use of representation improved and they discovered dependent-independent meaning of variables rather than its unknown meaning. To sum up, this study suggests that the prospective teachers' abilities to generalize patterns algebraically were improved as a result of the teaching experiment.

Key Words: Mathematics Education, Algebra, Patterns, Generalization

* Dr. Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, ditanisli@gmail.com

1. Giriş

Matematiksel bilgi gelişiminin ve matematiksel düşünme sürecinin temellerinden biri olan genelleme, matematiksel etkinliklerin merkezindedir ve pek çok konu alanının yapı taşlarından biridir. Polya (1957; Akt. Amit & Neria, 2008) pek çok bilimsel keşfi ve matematiksel sonuçları genellemeye dayandırır. Aslında Mason'un (1996) "genelleme matematiğin özüdür" ifadesi genellenenin matematikteki yerini açıkça ortaya koymaktadır. Genelleme yapan kişinin düşünme biçiminin ve bilişsel yapısının dikkate alınması genellenenin matematik eğitimindeki yerini de ön plana çıkarmaktadır. Nitekim Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (National Council of Teacher of Mathematics/NCTM, 2000) standartlarında genelleme matematik eğitiminin genel amaçlarından biri olarak açıklanır. Genelleme yaparak matematiksel bir durumun özelliklerinin daha ilerisi görülebilir ve bir takım genel sonuçlara ulaşılabilir. Dolayısıyla genelleme yapma üst düzey bilişsel bir beceri gerektirir. Erken öğrenme basamaklarından itibaren ele alınması gereken örüntüler ise genellenenin biçimlenmesinde temel bir adımdır. Örüntüleri genelleme öğrencilerin cebirsel düşünme ve özellikle değişken ve fonksiyon kavramlarının gelişiminde önemli bir öğedir. Örüntüler genellenenin, genelleme ise cebirin bir alt kümesi olarak görülebilir (Tanışlı & Özdaş, 2009).

Uluslararası alanyazında farklı sınıf düzeylerinde öğrencilerin sayı, şekil, tablo gibi farklı temsiller ile verilen lineer ya da lineer olmayan örüntüleri genelleme sürecinde kullandıkları yaklaşımları ve stratejileri belirlemeye yönelik pek çok çalışmaya rastlanmaktadır. Bu çalışmaların ilki diyebileceğimiz çalışmada Stacey (1989) örüntünün devamında gelen en yakın terimi bulmayı gerektiren "yakın genelleme" ve bir örüntüde genel bir kuralın bulunmasını gerektiren "uzak genelleme" arasındaki farkı ortaya koymuş ve üç temel genelleme stratejisi tanımlamıştır. Birincisi, örüntünün bir önceki teriminden bir sonraki teriminin elde edildiği "yinelemeli" (recursive) strateji, ikincisi "fonksiyonel ilişki arama", üçüncüsü ise $f(x)=ax+b$ ($b \neq 0$) ilişkisinin olduğu durumda $f(x)=nx$ oranının kullanıldığı yani orantısal akıl yürütmenin uygulandığı "bütüne genişletme" (whole-object) stratejisidir. Garcia-Cruz ve Martinon (1998) ise örüntülere ilişkin çalışmalarında genelleme seviyelerini yinelemeli stratejiye dayanan "kısmi genelleme" ve fonksiyonel bir ilişkiyi araştırmaya dayanan "ayrıntılı genelleme" olarak tanımlamışlardır. Lannin (2005) ise, örüntüleri genellemede kullanılan genelleme stratejilerini "belirgin olmayan" (non-explicit) ve "belirgin" (explicit) olmak üzere iki başlık altında toplamıştır. Belirgin olmayan stratejiler başlığı altında sayma ve yinelemeli stratejiyi, belirgin stratejiler başlığı altında ise, bütüne

genişletme (whole-object), tahmin ve kontrol (guess-and-check) ve bağlamsal (contextual) şeklinde stratejileri ele almıştır.

Radford (2006) ise örüntüleri genellemenin ilk aşamasını, örüntünün terimleri arasında olası değişmeyen özelliğe ya da ilişkiye odaklanma ya da dikkat çekme, bir özelliği ya da düzenliliği kavrama olarak ifade eder. Bu ilk aşamanın ardından gelişen süreçler ise örüntüleri genellemenin farklı tanımlarını ortaya koymaktadır. Radford (2008) örüntüleri genellemeyi cebirsel, aritmetik ve olgunlaşmamış tümevarım olarak sınıflandırmakta, cebirsel olarak bir örüntüyü genellemeyi ise, bazı ayrıntılara ($p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$) dikkat ederek bir özelliği kavrama, dizinin tüm terimlerine ($p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}, \dots$) bu özelliği genişletme ya da genelleme ve dizinin herhangi bir terimini bulmada bu özelliği kullanabilme yeteneği olarak tanımlar. Bu tanım iki farklı unsur içerir. Birincisi dizinin birkaç teriminden bir özelliğe dikkat çekme, ikincisi ise bu özelliği dizinin tüm terimlerine genellemedir. Birinci unsur Radford'un aritmetik örüntüleri genelleme sınıflamasına karşılık gelir. Ona göre aritmetik örüntüleri genelleme, terimlere ilişkin bir özelliği genelleme, ancak herhangi bir terim sayısının hesaplanmasında direk bir kuralı elde edememdir. Bu süreçte de bir genelleme söz konusudur, ancak bu cebirsel bir nitelik taşımaz. Aslında bu süreç Peirce'nin geri çıkarım (abduction) olarak adlandırdığı bir süreçtir (Radford, 2008). Geri çıkarım, nedenlerden sonuçlara giden ve en iyi açıklamayı veren bir akıl yürütme süreci olup tümdengelim ve tümevarım çıkarımlarından farklı bir çıkarım türüdür. İlk defa Peirce tarafından değişik bir çıkarım türü olarak ortaya atılmış ve tümdengelim çıkarımından türetilmiştir. Ancak tümdengelim gibi mantıksal açıdan geçerli bir çıkarım değildir. Bilgi üretir, ancak ürettiği bilgi kesin değildir (İnönü, 2006). Radford (2008) olgunlaşmamış tümevarımı ise kuralı tahmin etmeye dayalı bir yöntem olarak ifade eder. Bu süreçte de geri çıkarım yapılmaktadır, ancak bu durum terimler arasında bir özelliğin çıkarımı ile sonuçlanmaz, yapılan sadece bir tahmin ya da deneme yanılmadır. Bu süreç tümdengelim çıkarıma diğer bir ifade ile olası bir muhakemeye dayanan işlem ile elde edilen bir kuraldır.

Rivera ve Becker (2007a; 2007b) ise Radford'un cebirsel örüntüleri genelleme sürecini, geri çıkarım (abduction)-tümevarım (induction)-genelleme ile ifade ederler. Onlar örüntüleri genellemede geri çıkarım sürecini bir düzenliliği keşfetme ve geliştirme, tümevarım sürecini düzenliliği test etme, doğrulama ve uygulanabilir genel bir form oluşturma, genelleme sürecini ise geri çıkarım ve tümevarım birleşiminin bir ürünü olarak uygulanabilir genel formu kabul etme şeklinde ifade ederler. Lineer şekil örüntülerini genelleme sürecinde de yapıcı genelleme (construction generalization) ya da yapıyı çözücü genelleme (deconstruction generalization) şeklinde iki genelleme tipi tanımlarlar (Becker &

Rivera, 2007; Rivera & Becker, 2008). Yapıcı genelleme, kapalı formülü $y=mx+b$ lineer formunda olan, kolayca elde edilebilen, verilen şekillerin kenarlarında ya da köşelerinde örtüşenleri göz önüne almaksızın direk olarak şekilsel ipuçlarından çıkarılmış genellemedir. Yapıyı çözücü genelleme ise yapıcı genellemeye göre daha karmaşıktır ve tamamen geçerliliğini belirlemek için şekilsel ipuçları içerisinde kenarlarda ya da köşelerde örtüşenleri tanımayı gerektirir.

Yapılan çalışmalar incelendiğinde, örüntüleri genellemede belirlenen genelleme stratejileri ve yaklaşımlarının yanı sıra bazı çalışmalarda da öğrencilerin verilen bir örüntüde ardışık terimler arasındaki ilişkiyi keşfederek örüntüyü yakın bir adıma devam ettirebildikleri buna karşın uzak bir adıma devam ettirmede zorlandıkları ve cebirsel bir kurala karşılık gelen genellemeyi yapamadıkları, bu noktada da yanlış stratejiler kullandıkları ya da tek düze düşünme yapısına sahip oldukları belirlenmiştir (Stacey, 1989; Hangreaves, Shorrocks & Threlfall, 1998; MacGregor & Stacey, 1993; 1997; Lannin, 2005; Radford, 2006; Rivera & Becker, 2007a; 2007b; Amit & Neria 2008; Radford, 2008).

Türkiye’de ise 2005 de yenilenen ilköğretim matematik dersi öğretim programına ilk kez dâhil edilen örüntüler üzerine farklı sınıf düzeylerinde gerçekleştirilen çalışmalara da rastlanmaktadır. Tanışlı ve Özdaş (2009) lineer ve lineer olmayan şekil örüntülerini genellemede ilköğretim 5. sınıf öğrencilerinin görsel ve cebirsel yaklaşımı benimsedikleri, yakın genellemelerde örüntünün bir önceki teriminin kullanılmasını gerektiren yinelemeli, uzak genellemelerde ise fonksiyonel ilişkinin kullanılmasını gerektiren belirgin stratejileri kullandıkları, bazı öğrencilerin de uzak genelleme yapmada zorlandıkları belirlenmiştir. Benzer şekilde Akkan ve Çakıroğlu (2012) 6-8. sınıf öğrencilerinin doğrusal ve ikinci dereceden örüntülerle ilgili genelleme stratejilerini belirledikleri çalışmalarında, öğrencilerin öğrenim seviyesi arttıkça örüntü genelleme stratejilerindeki çeşitlilik ve doğru genellemeye ulaşma yeterliliklerinin arttığı, öğrencilerin genel olarak yinelemeli stratejileri kullandıkları, fonksiyonel stratejiyi kullanan öğrencilerin sayısının oldukça az olduğu saptanmıştır. Baş, Erbaş ve Çetinkaya (2011) ise, öğretmenlerin 9. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme yapıları ile ilgili bilgilerini araştırdıkları çalışmalarında öncelikle öğrencilerin cebirsel örüntüleri genelleme konusunda çeşitli çözüm stratejileri kullandıkları ve bu bağlamda da farklı düşünme yapılarına sahip olabildikleri ortaya koyulmuştur. Buna karşın öğretmenlerin ise öğrencilerin cebirsel düşünme yapılarına ilişkin beklentileri ile öğrencilerin gerçek performansları arasında önemli farklar olduğu belirlenmiştir. Yeşildere ve Akkoç (2011) matematik öğretmen adaylarının örüntüleri genelleme süreçlerini inceledikleri ve bu süreçte

model kullanımında tercih ettikleri görsel kalıpları belirledikleri çalışmalarında ise, öğretmen adaylarının lineer ve lineer olmayan şekil örüntülerini genelleme sürecinde, lineer şekil örüntülerinden lineer olmayanlara göre daha çok yararlandıkları belirlenmiştir. Ayrıca, öğretmen adaylarının şekil örüntüsünü genellemede sayısal genelleme yapmaya yatkın oldukları ve verilen örüntüde sadece bir sonraki terimi bulmayı sağlayacak şekilde ortak bir özellik araştırdıkları görülmüştür. Diğer taraftan sınıf öğretmeni adaylarının lineer şekil örüntülerini genelleme stratejilerinin belirlendiği bir başka çalışmada da (Tanışlı & Köse, 2011) bazı öğretmen adaylarının şekil örüntüsünü genelleyemedikleri bazı adayların da şekildeki cebirsel yapıyı göremedikleri ve sayısal genelleme yapmaya çalıştıkları ancak bu genellemelerinde de fonksiyonel bir ilişkiyi gerektiren stratejileri kullanmada yetersiz oldukları belirlenmiştir. Çalışmada hem sayısal hem de görsel genelleme yapabilen adaylar olmasına karşın, bazı adayların aynı sorudaki görsel ipuçlarını fark etmede eksiklikleri olduğu ve kısmi genelleme yapabildikleri ve aynı soruya ilişkin farklı formüller arasındaki eşitliği belirleyemedikleri saptanmıştır.

Yapılan çalışmalar dikkate alındığında öğretmen adaylarının örüntüleri genellemede öğrenciler kadar sıkıntı yaşadıkları öğretmenlerin de öğrencilerin örüntüleri genellemedeki cebirsel düşünme yapılarına ilişkin beklentilerinin istenilen düzeyde olmadığı dikkati çekmektedir. Öğretmenlerin ya da öğretmen adaylarının daha önceki öğrenim yaşantılarında örüntü kavramına ilişkin bir deneyim yaşamamaları, bu kavramı genellemeye ilişkin sınırlı bir bakış açısına sahip olduklarının bir göstergesidir. Oysaki öğrencilerin çeşitli ve doğru çözüm stratejileri geliştirebilmelerinde, farklı düşünme yapılarına sahip olabilmelerinde öğretmenlerin rolü oldukça önemlidir. Diğer taraftan öğretmenler kadar öğretmen adaylarının da gelecekte bu durumu öğrencilerine yansıtabilmeleri açısından onlara büyük görevler düşmektedir. Bu bağlamda öğretmen adaylarının örüntüleri genelleme sürecinde bilişsel yapılarının belirlenmesi ve adayların daha karmaşık genelleme yapabilmede ve savunabilmede ne kadar başarılı olabildiklerinin araştırılması ayrı bir önem kazanmaktadır. Bu düşünce bu çalışmanın katılımcılarının öğretmen adayları arasından seçilmesinde etkili olmuştur. Türkiye’de 2005 yılında yenilenen ilköğretim matematik programında, örüntü kavramına ilk kez yer verilmesinden dolayı, daha önce örüntü kavramına ilişkin bir öğretim almayan bu adaylara, öğretim yapıldığı takdirde çeşitli ve doğru çözüm stratejileri geliştirebilmelerinde ve düşünme yapılarında nasıl bir gelişim göstereceklerinin merak edilmesi de bu çalışmanın yapılmasında etkili olan diğer bir neden olmuştur. Bu çalışmanın

sonuçlarının öğretmen eğitimine katkı sağlayacağı ve öğretmen eğitimcilerine de farklı bir yelpaze sunacağı düşünülmektedir.

Bu çalışmanın amacı, sınıf öğretmeni adaylarının örüntüleri genelleme sürecindeki bilişsel yapılarını ve bu süreçte kullandıkları genelleme tiplerini ortaya koymaktır.

2. YÖNTEM

Araştırma Deseni

Bu araştırma ile, sınıf öğretmeni adaylarının lineer şekil örüntülerini nasıl genelledikleri, hangi genelleme yapılarını kullandıkları ve ulaştıkları kuralları nasıl savdukları üzerine odaklanılmıştır. Bu odaklanmanın detaylı olarak incelenmesi ve değerlendirilebilmesi için verilerin toplanması, çözümlenmesi ve analiz süreçlerinde nitel araştırma yaklaşımları benimsenmiştir.

Araştırmada, nitel araştırma paradigması içerisinde yer alan yorumlayıcı yaklaşıma dayalı bir model olan (Wood, Cobb & Yackel, 1990) ve özellikle matematik eğitiminde kullanılan “öğretim deneyi (teaching experiments)” araştırma deseni olarak seçilmiştir. Öğretim deneyi deseni araştırmacıların, kendi etkinliklerini düzenlemelerinde kullandıkları kavramsal bir araç olarak tanımlanabilir. Piaget'nin klinik görüşme tekniğinden üretilmiş olmasına karşın, öğrencilerin matematiksel bilgilerinin ortaya çıkarılmasının yanı sıra bu bilgilerin etkilenme yollarının/araçlarının ve durumlarının deneyimlenmesini de kapsadığından klinik görüşmeden daha kapsamlıdır (Steffe &Thompson, 2000). Öğretim deneyleri zengin öğrenme ortamlarında öğrencilerin gelişimi üzerine odaklanabildiği gibi bir takımın, grubun ya da bu gruptaki bireylerin düşüncelerinin gelişimi üzerine de odaklanabilir. Yanı sıra bazı öğretim deneylerinin öğretmenlerin gelişimi, sınıf öğretim ortamlarının ya da öğretim etkinliklerinin gelişimi üzerine odaklandıkları da görülmektedir. Böyle bir odaklanma, ister görüşmelerin yapıldığı odalarda, ister sınıf ortamları gibi öğrenme ortamlarında üretilebilen en uygun gelişimleri gözlemlemeyi mümkün kılar. (Kelly&Lesh, 2000). Böylece öğrencilerin bilgi yapılarını düzenlemeleri, gelişim sürecinde kullandıkları stratejileri ve genel olarak bilişsel yapılarını anlama olanaklı hale gelir.

Bu araştırmada ise araştırmacılar öğretim deneyini, öğretmen adaylarının lineer şekil örüntülerini genelleme sürecindeki bilişsel yapılarını ortaya çıkarmak ve geliştirebilmek amacıyla kullanmışlardır. Böylesi bir süreçte araştırmacılar adayların matematiksel yapılarını anlamak için bir temel oluşturabildikleri ya da ortaya koyabildikleri gibi onların uygulama

sürecindeki matematiksel anlamlandırmalarını, eylemlerini ve kullandıkları dili de inceleyebilirler (Steffe&Thompson, 2000).

Katılımcılar

Araştırmanın katılımcılarını bir devlet üniversitesindeki Eğitim Fakültesi Sınıf Öğretmenliği 3. sınıf öğretmen adayları oluşturmaktadır. Araştırmada seçilen 16 öğretmen adayının verilen lineer şekil örüntülerine ilişkin genellemeleri üzerine odaklanılmıştır. Bu odak öğretmen adaylarının seçiminde, amaçlı örnekleme yöntemlerinden biri olan ölçüt örnekleme kullanılmıştır (Yıldırım & Şimşek, 2003). Öğretmen adaylarının seçiminde iki temel ölçüt dikkate alınmıştır. Bu ölçütlerden ilki adayların sınıf öğretmenliği programında yer alan “Matematik Öğretimi I” dersini almış olmalarıdır. İkinci ölçüt ise Matematik öğretimi I dersinde sınıf içi etkinliklerde ve ön değerlendirmelerde sorulan problemlerde uygun akıl yürüten ve ifade becerisi yüksek öğrencilerin seçilmesidir. Ayrıca seçilen öğrencilerin gönüllü olması dikkate alınmış, bulgularda adayların gerçek isimleri kullanılmamıştır.

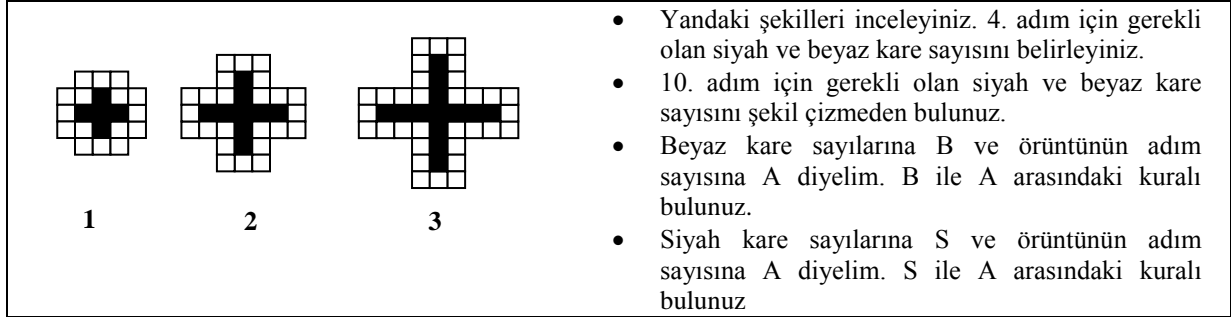
Verilerin Toplanması

Araştırmada veriler, haftalık öğretim sürecinde çekilen video kayıtları, klinik görüşmeler ve çalışma yaprakları yardımıyla toplanmıştır. Öğretim deneyi öğrencilerin ne yaptıkları ile ilgilendiği gibi daha ağırlıklı olarak nasıl yaptıkları ile ilgilenir. Bu nedenle toplanan veriler genelde nicelden ziyade nitel özelliklidir. Nitel veriler iki olası kaynaktan elde edilir. İlk kaynak öğrencilerle gerçekleştirilen öğretimler, diğer kaynak ise öğretim süreci içerisinde belirlenen noktalarda gerçekleştirilen klinik görüşmelerdir (Cobb&Steffe, 1983).

Öğretim Süreci ve Klinik görüşmeler

Öğretim deneyi üç temel aşamayı içeren bir döngü olarak ifade edilebilir. Cobb (2000) bu aşamaları öğretim sürecinin tasarlanması ve planlanması, sınıf içinde uygulanması ve geriye dönük analiz olarak ifade etmektedir. Öğretim sürecinin tasarlanması ve planlanması aşamasında, öğretmen adaylarının genelleme süreçlerindeki bilişsel yapılarını ortaya çıkarmak amacıyla örüntülerin kullanılmasına karar verilmiştir. Örüntüler konusuna ilk kez Türkiye’de 2005-2006 öğretim yılında yenilenen ilköğretim matematik programında yer verilmiştir. Dolayısıyla sınıf öğretmeni adayları için yeni bir kavram olan lineer şekil örüntülerini genellemeye ilişkin adayların bilişsel yapılarının ortaya çıkarılması amacıyla seçilen odaklar ile ön klinik görüşmeler, bu çalışmanın ilk ayağı olan bir başka çalışmada (Tanışlı & Köse, 2011), gerçekleştirilmiştir. Ön klinik görüşmelerde aşağıda verilen Becker ve Rivera (2005)

tarafından hazırlanan bir lineer şekil örüntüsü kullanılmıştır. Örüntünün ilk üç adımı verilerek adaylardan önce siyah ve beyaz kare sayılarına ilişkin yakın ve uzak adımı bulmaları daha sonra da siyah ve beyaz kare sayılarını genellemeleri istenmiştir.

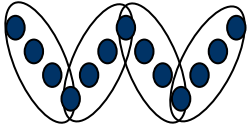
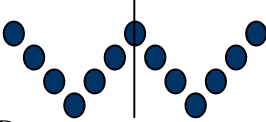
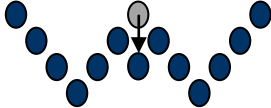
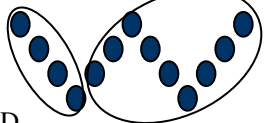
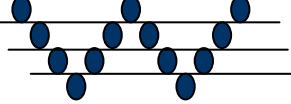
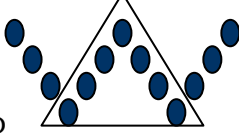
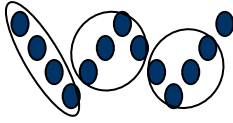
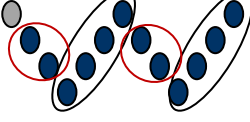


Şekil 1. Ön görüşme görevi

Ön görüşmelerde adayların lineer şekil örüntülerini genellemede sayısal ve görsel olmak üzere iki yaklaşım benimsedikleri, siyah ve beyaz kare sayılarına ilişkin kuralın belirlenmesinde görsel ipuçlarından istenilen oranda yararlanamadıkları ve belirledikleri kuralı savunamadıkları görülmüştür (Tanışlı & Köse, 2011). Ön görüşmeler aracılığıyla belirlenen bu eksikliklerin giderilmesi ve öğretmen adaylarının genelleme yapılarına ilişkin bilişsel yapılarının geliştirilmesi amacıyla çalışmanın ikinci ayağı olan bu araştırmanın öğretim aşamasına geçilmiştir. Bu aşamada lineer şekil örüntülerini genellemeye yönelik araştırmacılardan birinin rehber, diğerinin ise gözlemci olduğu bir öğretim gerçekleştirilmiş, tamamlanan öğretim sürecinin hemen ardından adaylar ile tekrar görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Ön görüşmeler, öğretim süreci ve son görüşmeler video ile kaydedilmiştir. Öğretim deneyinin süresi birkaç saatten birkaç hafta, bir dönem ya da bir akademik yıla kadar değişkenlik gösterebileceğinden (Kelly&Lesh, 2000, s.192) dolayı adaylar ile gerçekleştirilen öğretim süreci 4 hafta sürmüştür. Bu öğretimlerde odak olarak belirlenen adayların genellemelerine ve kullandıkları stratejilere özel olarak dikkat edilmiş, video kamera küçük grup tartışmalarında seçilen adaylara odaklanmıştır. Öğretimlerde alanyazındaki çeşitli araştırmacıların kullandıkları görevlerden yararlanılmıştır. Bu görevlerde kullanılan lineer şekil örüntülerinin adayların genelleme sürecinde farklı bakış açıları üretmelerini desteklemesine ve farklı genelleme tiplerini içermesine dikkat edilmiştir. Görevlerde verilen örüntüler için çalışma yaprakları dağıtılmış, sınıf içi tartışmaya geçmeden önce her bir görev için adaylardan 10-15 dakika süresince verilen örüntüler üzerinde bireysel olarak çalışmalarını istenmiştir. Bu süreci tüm adayların genellemelerinin tartışıldığı sınıf içi tartışmalar izlemiştir. Ek-1 de öğretim sürecinde kullanılan bir örüntü sorusu örnek olarak sunulmuştur. Bu sorunun tartışıldığı dersin video kayıtları analiz edildiğinde, örüntüyü

cebirsel genelleyen öğretmen adayların çoğunluğunun Tablo 1’de verilen genelleme tiplerini kullandıkları görülmüştür. Bu genelleme tiplerini kullanan adaylarının nasıl düşündüklerini ve kurala nasıl ulaştıklarını da açıklamaları istenmiş, örüntüleri genellemede farklı bakış açılarının önemi üzerinde tartışmalar gerçekleştirilmiştir.

Tablo1: Öğretim sürecinde elde edilen genelleme tipleri

<p><i>Yapıyı çözücü</i></p>  <p>$4(A+1)-3=D$</p>	<p><i>Çarpımsal yapıcı standart olmayan (Multiplicative constructive nonstandard)</i></p>  <p>$2(2A)+1=D$</p>
<p><i>Dönüştürme dayalı yapıcı (Transformation-based constructive)</i></p>  <p>$5+4(A-1)=D$</p>	<p><i>Toplamsal yapıcı standart olmayan (Additive constructive nonstandard)</i></p>  <p>$A+1+3A=D$</p>
<p><i>Çarpımsal yapıcı standart olmayan</i></p>  <p>$5+4(A-1)=D$</p>	<p><i>Çarpımsal yapıcı standart olmayan</i></p>  <p>$2A+2A+1=D$</p>
<p><i>Çarpımsal yapıcı standart</i></p>  <p>$4A+1=D$</p>	<p><i>Çarpımsal yapıcı standart olmayan</i></p>  <p>$(A+1).2+(A-1).2+1=D$</p>
<p><i>A adım sayısı, D toplam daire sayısı</i></p>	

Verilerin Analizi

Verilerin analiz sürecinde öğretim deneyi sürekli analiz (ongoing analysis) ve geriye dönük analiz (retrospective analysis) olmak üzere iki önemli analiz düzeyini içermelidir. Sürekli analiz öğrencilerle birlikte yapılan öğretim dersleri arasında ve bu dersler süresince gerçekleştirilirken, geriye dönük analiz birbirini izleyen bir dizi öğretim derslerinin tamamı üzerinde gerçekleştirilir.

Sürekli analiz öğretmenlerin öğrencilerinin öğrenmelerini daha öteye taşımak için gerçekleştirdikleri doğal ya da planlanmış yönlendirmelerde temeldir. Bu analizin anahtar boyutu ise öğrencilerin bilgilerine, eylemlerine ve eğilimlerine göre araştırmacının modelini oluşturabilmesi ve düzenleyebilmesidir (Simon, 2000). Araştırmanın sürekli analiz sürecinde her dersin sonunda araştırmacılar kaydedilen videoları seyrederek elde edilen sonuçları ve

gözlemlerini ayrıntılı olarak tartışmışlar, verilen örüntülerin genelleme sürecinde gerekli gördükleri düzenlemeleri gerçekleştirmişlerdir.

Geriye dönük analiz tüm veri setinin yeniden ele alınmasını içerir. Bu analiz öğretim deneyinin ilgili kayıtlarının (ön görüşmeler, öğretim süreci ve son görüşmeler) tamamının dikkatle incelenmesini gerektirir. Bu analizin amacı öğrencilerin matematiksel gelişimlerini açıklayabilmektir (Simon, 2000). Bu amaç doğrultusunda gerçekleştirilen öğretim sürecinin ve klinik görüşmelerin tamamının dökümleri yapılmış, öğretmen adaylarının görüşmelerde kullandıkları çalışma yapraklarının (işlemler ve çizimler) fotoğrafları çekilerek veri seti oluşturulmuştur. Oluşturulan veri seti iki alan uzmanı tarafından birbirinden bağımsız olarak analiz edilmiştir. Bu analiz sürecinde öğretmen adaylarından verilen örüntüyü cebirsel genelleyen adayların genelleme tiplerinin belirlenmesinde ise Rivera'nın (2010) tanımladığı 7 genelleme tipinden yararlanılmıştır. Bu genelleme tipleri bulgularda ayrıntılı olarak açıklanmış, örnekler sunulmuştur. Güvenirlik için ise iki araştırmacı tarafından gerçekleştirilen analizler karşılaştırılarak görüş birliği sağlanmıştır. Kodlayıcılar arası güvenirlikte Miles ve Huberman'ın güvenirlik formülü kullanılmıştır. Son olarak veriler doğrudan alıntılar ve öğrencilerin çizimleri ile desteklenerek her bir örüntü için ayrı ayrı yorumlanarak sunulmuştur (Miles&Huberman, 1994).

3. BULGULAR

Araştırma sonucunda elde edilen bulgular “Öğretmen adaylarının ön görüşmelerdeki genelleme süreçleri” ve “Öğretmen adaylarının son görüşmelerdeki genelleme süreçleri” olmak üzere iki ana temada toplanmış ve sunulmuştur.

Öğretmen Adaylarının Ön Görüşmelerdeki Genelleme Süreçleri

Cebirsel Genelleme

Sınıf öğretmeni adayları ile gerçekleştirilen ön klinik görüşmelerde lineer şekil örüntülerini genellemede adayların ağırlıklı olarak sayısal olmak üzere sayısal, görsel ve hem sayısal hem görsel (paragmatik) yaklaşımlar kullandıkları saptanmıştır.

Sayısal yaklaşım altında adaylar sadece yinelemeli (recursive) olmak üzere, terimler arası farkı bulma, bir önceki terimden bir sonraki terimi elde etme, tahmin ve kontrol, aralık sayma, bağıntı arama ve araç örüntü oluşturma gibi pek çok strateji kullanmışlardır. Görsel yaklaşım altında öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğunun örüntüleri genellemede hem yinelemeli hem de fonksiyonel stratejiler kullandıkları görülmüştür. Cebirsel genellemeye ulaşan öğretmen adaylarının kullandıkları stratejiler ve belirledikleri kurallar incelendiğinde,

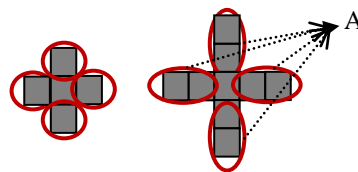
adayların Rivera'nın (2010) belirlediği 7 cebirsel genelleme tipinden sadece üçünü kullandıkları belirlenmiştir. Adayların genelleme tipleri Tablo 2'de sunulmuştur.

Tablo2: Ön-görüşmelerdeki örüntüye ilişkin genelleme tipleri

Cebirsel Genelleme Tipleri	Cebirsel Kural	Kullanan Öğretmen adayı sayısı (f)
<i>Çarpımsal yapıcı standart</i>	$4A+1=S$	13
<i>Çarpımsal yapıcı standart olmayan</i>	$4(A+(A-1))+12=B$	4
	$4(A+9)+12=B(\text{yanlış})$	1
	$4(2A+1)+4=B$	3
	$4(2A+1)+4=B$	2
	$4(3A-(A-1))+4=B$	1
<i>Yapıyı çözücü</i>	$4((A+A)-1)+12=B$	1

Öğretmen adaylarının genelleme tipleri incelendiğinde onların ağırlıklı olarak siyah (S) ve beyaz (B) kare sayılarını genellemede yapıcı genelleme tiplerini kullandıkları görülmektedir. Lineer bir şekil örüntüsünün *yapıcı genellemesi* örüntünün her bir adımındaki şekli üst üste gelmeyen parçalardan oluşan bir yapı olarak düzenlemeyi ve ilişkilendirmeyi ifade eder. Bu genellemeler aracılığıyla ulaşılan kurallar standart ya da standart olmayan biçimde olabilir. Standart biçim örüntünün kuralının en sade biçimi olan " $4A+1=S$ " eşitliğini ifade ederken, standart olmayan biçim hala sadeleştirilebilir olan " $2(2A+1)-1=S$ " eşitliğini ifade eder.

Öğretmen adaylarının tamamına yakını siyah kare sayılarını genellerken sadece çarpımsal yapıcı standart tipi kullanmışlardır. Adaylar Şekil 2'de verilen örüntüde siyah kare sayılarını genellemede şekildeki dört parçayı (daire içine alınan) eş zamanlı düşünerek adım sayısı ile ilişkilendirmiş ve $4A+1=S$ genellemesine ulaşmışlardır. Adaylardan birinin genelleme süreci Şekil 2'de ayrıntılı olarak sunulmuştur. Aday örüntüyü incelerken verilen şekli artıya benzeterek artının kollarının adım sayısı ile eşit sayıda olduğu gerçeğinin bulunmuş, dört kol olduğunu ifade ederek ortadaki karenin sabit alınacağı varsayımında bulunarak varsayımını test etmiş ve doğrulamıştır (tümevarım muhakeme). Aday $4A+1=S$ kuralına ulaşarak örüntüyü cebirsel olarak genellemiştir.



Şekil 2. Çarpımsal yapıcı standart genelleme

- Geriçikarım Sena(S):** Küçük karelerden oluşmuş, artı şekline benzer, birer kareden oluşmuş (1.adım), ikinci şekilde de artı ikişer kareden oluşmuş, siyahlar her kolda birer tane artmış, 3. şekilde de üçer kareden oluşmuş kenarları. 4. adımda yine bu kenarda (üst kolu göstererek) ise kare sayısı dörde çıkacak, her kenarda büyük artının kenarları dörder kareye çıkacak.
- Araştırmacı(A):** O zaman 4. adımda toplam kaç tane siyah kare vardır?
- S:** 17 tane
- Tümevarım A:** Nasıl buldun?
- S:** Her kolda 4 tane var. 4 tane kol var. Dört çarpı dört 16, içte de bir tane kare var. Bu da 17.
- A:** 10. adımda kaç tane siyah kare vardır?
- S:** Eee ... bu ortadaki her zaman bir tane kare sabit var. 1. Adım için her kolda birer tane var. O da dört kol olduğu için dört çarpı 1 artı 1 ((4x1)+1 yazdı), ikinci adımda da...dört çarpı 2 artı 1 (4x2)+1 yazdı), ...10. Adım için de her kolda 10 tane siyah kare olacak. O da dört çarpı 10, ortada bir de sabit olduğu için artı 1 ((4x10)+1 yazdı)
- Genelleme A:** Siyah kare sayısına S ve adım sayısına A dersek S ile A arasında bir kural bulabilir misin?
- S:** Her zaman adımlar arttıkça siyah sayısı da aynı sayıda artıyor. Her kolda dört siyah yani her artıda dört kol var (4A yazdı), her koldaki sayı da adım sayısını veriyor. Onun için 4 çarpı adım sayısı artı hepsinin ortasında da bir tane siyah olduğu için artı 1. (4A+1=S yazdı)

Beyaz kare sayılarını genellemede ise öğretmen adaylarının yarısının çarpımsal yapıcı genelleme tipi ile standart olmayan biçimdeki $4(A+(A-1))+12=B$, $4(2A+1)+4=B$ ve $4(3A-(A-1))+4=B$ kurallara çeşitli stratejiler aracılığıyla ulaştıkları görülmüştür. Beyaz kare sayılarını genellemede sadece bir adayın yapıyı çözücü genelleme yaptığı ve Rivera'nın (2010) tanımladığı, "toplamsal yapıcı standart", "toplamsal yapıcı standart olmayan", "tamamlamaya-dayalı yapıcı/yapıyı çözücü" ve "dönüşüme dayalı yapıcı/yapıyı çözücü" genellemelerin hiç kullanılmadığı da belirlenmiştir.

Paragmatik yaklaşım ise bir örüntünün genellenmesinde görsel ve sayısal yaklaşımlar gibi farklı yaklaşımların bir arada esnek ve uyumlu bir biçimde uygulanmasını kapsar. Gerçekleştirilen ön görüşmelerde adayların çoğunluğunun sayısal stratejileri kullanmalarına karşın bazı adayların genelleme sürecinde görsel yaklaşımlardan yararlanarak şekil örüntüsündeki görsel ipuçlarını yakaladıkları, yakaladıkları ipuçlarından sayı örüntüleri oluşturarak kuralı belirledikleri görülmüştür. Adayların bu yaklaşımı Tanışlı ve Köse'nin (2011) çalışmasında olduğu gibi "görsel içinde sayısal" olarak isimlendirilmiştir.

Aritmetik Genelleme

Gerçekleştirilen ön görüşmelerde öğretmen adaylarından bazıları örüntüleri genellemede geri çıkarımda bulunmalarına karşın bir genellemeye ulaşamamışlardır. Adaylar bu süreçte görsel ipuçlarından yararlanmışlar ancak bu ipuçları ile sadece yakın ya da uzak adımı belirleyebilmişlerdir. Örneğin uzak adımdaki siyah kare sayısını belirlemede bir

öğretmen adayı öncelikle şekildeki eşit sayıdaki dikey ve yatay kareleri fark etmiş ve ardından ortak kare için 1 çıkarması gerektiğini ifade etmiştir. Örüntünün 10. adımındaki kare sayısını belirlemek için ise dikey kare sayılarını 3, 5, 7, 9, 11, 13 sayı örüntüsüne dönüştürmüş ve bu örüntüyü 10. adıma kadar devam ettirerek 21 i elde etmiş, $21+21-1=41$ olarak uzak adımdaki siyah kare sayısını belirlemiştir. Aday burada şekildeki ipuçlarını yakalamasına karşın, genelleme sürecinde bu ipuçları ile adım sayısını ilişkilendirememiş, dönüştürdüğü sayı örüntüsüne ilişkin aritmetik bir genelleme yapmış, bununla birlikte örüntünün kuralını bulamamıştır.

Olgunlaşmamış Tümevarım

Gerçekleştirilen ön görüşmelerde öğretmen adaylarından ikisinin siyah ve beyaz kare sayılarına, bir adayın ise beyaz kare sayılarına ilişkin cebirsel bir genellemeye ulaşamadıkları belirlenmiştir. Bu adayların örüntü genelleme süreçleri incelendiğinde onların kuralı tahmin etmeye dayalı bir yol izledikleri, belli bir geri çıkarımda buldukları ancak çıkarımlarının deneme yanılma ya da tahminin ötesine geçemediği görülmüştür. Örneğin öğretmen adaylarından biri siyah kare sayılarına ilişkin genellemede, öncelikle terimler arası sabit farka odaklanmış, uzak adım için gerekli siyah kare sayısını belirlemek için bir kural arayışına girerek önce $n+1$ kuralını belirlemiştir. Bu kuralı birinci adım için test eden aday kuralın işlemediği fark ederek $n+4$ kuralını ve ardından ikinci adım için de $n+7$ kuralını elde etmiştir. Bu kuralların da diğer adımlar için işlemediğini ifade eden aday tamamen tahmine dayalı olarak $4n+1$ kuralına ulaşmıştır. Her ne kadar adayın doğru bir kurala ulaşmış olduğu görülse de sürecinin olgunlaşmamış tümevarıma dayalı olduğu söylenebilir.

Hayriye: ...artılan...siyahlar oranlı bir şekilde artmış. Siyah kareler dörder şekilde artıyor her seferinde sanırım. 1, 2, 3, 4 evet siyahlar dörder kare artarak gidiyor.

Araştırmacı: Nasıl belirledin dört tane arttığını?

H : Sayarak. Birincisinde siyah kareler 5 tane, ikinci adımda 9 tane, üçüncü adımda 13 tane. Dördüncü adımda da dört artması gerekiyor, üzerine dört eklersek 17.

A : 10. Adım için gerekli siyah kare sayısını bulabilir misin?

H : Kural belirleyeceğim. $n+1$ şeklinde yazsam dedin?

A : $n+1$ nedir?

H : 5. ama adım sayısı olmadığı için ondan vaz geçtim. $n+4$.

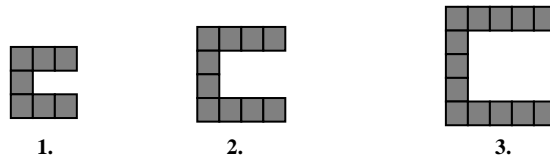
A : $n+4$ nedir?

H : 1. adım 5 $n+4$, 2. adım 9 $n+7$, olmuyor... $4n+1$ yapsam burasını (1. Adım için), birinci adımda 1 koyduğumda 5 oluyor, 2. Adımda 9 oluyor. O zaman benim kuralım $4n+1$...

Ön görüşmelerden elde edilen bu sonuçlar doğrultusunda adayların örüntüleri genellemelerde farklı bakış açıları geliştirmeleri, verilen örüntülerin yapısını iyi analiz edebilmeleri ve analiz sonucunda daha karmaşık genellemelere ulaşabilmeleri ve ulaştıkları bu genellemeleri savunabilmeleri amacı ile 4 hafta boyunca örüntüleri genellemeye yönelik etkinlikler gerçekleştirilmiştir.

Öğretmen Adaylarının Son Görüşmelerdeki Genelleme Süreçleri

Öğretim etkinliklerinin tamamlanmasının ardından öğretmen adayları ile son görüşmeler gerçekleştirilmiş, bu görüşmelerde 2 farklı örüntü görevi kullanılmıştır.



Şekil 3. C örüntüsü

Son görüşmelerde kullanılan ilk lineer şekil örüntüsü Şekil 3'de sunulan C örüntüsüdür (Olkun & Tanışlı, 2009). Bu örüntü kapsamında adaylardan öncelikle yakın ve uzak adımdaki kare sayılarını belirlemeleri, ardından adım sayısı (A) ile kare sayıları (K) arasındaki kuralı bulmaları istenmiştir.

Cebirsel Genelleme

Öğretmen adaylarının C örüntüsüne ilişkin genellemelerinde sayısal, görsel ve pragmatik olmak üzere üç yaklaşımı da kullandıkları görülmüştür. Sayısal yaklaşım altında öğretmen adaylarının adım sayısı ile kare sayısı arasında fonksiyonel bir ilişki aradıkları, bu arama sürecinde de t tablosu ve listeleme gibi temsil biçimlerini kullandıkları saptanmıştır. Öğretmen adaylarının yedisi tarafından kullanılan sayısal yaklaşım kapsamında t tablosunu kullanan 4 öğretmen adayının kare sayılarını adım sayıları ile ilişkilendirerek $3A+4=K$, $7+(A-1)3=K$, $3(A+1)+1=K$, $2(A+2)+A=K$ genellemelerine ulaştıkları belirlenmiştir. Bir öğretmen adayının t tablosu aracılığıyla oluşturduğu 2 farklı genelleme örnek olarak sunulabilir:

A	K
1	7 = 6+1 = 3.2+1 = 2.(A+2)+A=K
2	10 = 8+2 = 4.2+2
3	13 = 10+3 = 5.2+3
4	16

A	K
1	7 = 6+1 = 3.2+1 = 3.(A+1)+1=K
2	10 = 9+1 = 3.3+1
3	13 = 12+1 = 3.4+1

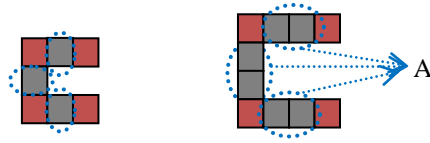
Görsel yaklaşım altında öğretmen adaylarının tamamına yakınının (15) örüntüleri genellemelerde fonksiyonel stratejiler kullandıkları görülmüştür. Adayların kullandıkları

stratejiler ve belirledikleri kurallar incelendiğinde, yedi genelleme tipinden altısının kullanıldığı belirlenmiştir. Adayların genelleme tipleri Tablo 3’de sunulmuştur.

Tablo 3: C örüntüsüne ilişkin genelleme tipleri

Örüntü	Cebirsel Genelleme Tipleri	Cebirsel Kural	Kullanan aday sayısı (f)
C Örüntüsü	<i>Toplamsal yapıcı standart olmayan</i>	$A+(A+2)+(A+2)=K$	1
	<i>Çarpımsal yapıcı standart</i>	$3A+4=K$	2
	<i>Çarpımsal yapıcı standart olmayan</i>	$2(A+1)+A+2=K$	2
		$A+2(A+2)=K$	11
		$2(A+1)+(A+2)=K$	10
		$7+3A=K$ (yanlış); $7+3(A-1)=K$	1
	<i>Yapıyı çözücü</i>	$3(A+2)-2=K$	4
	<i>Tamamlamaya-dayalı yapıcı/yapıyı çözücü</i>	$(A+2)^2-A(A+1)=K$	8
		$(4(A+2)-4)-A=K$	1
	<i>Dönüşüme dayalı yapıcı</i>	$3(A+1)+1=K$	1
$2(A+2)+A=K$		3	

Tablo 3’de görüldüğü gibi, öğretmen adayları C örüntüsünü genellemede çeşitli genelleme tiplerini kullanmışlardır. Adayların genellemeleri incelendiğinde ağırlıklı olarak standart ya da standart olmayan yapıcı genelleme tiplerinin kullanıldığı söylenebilir. Örneğin çarpımsal yapıcı standart genellemesini kullanan adaylardan biri Şekil 4’de koyu renk ile belirtilmiş kareleri sabit tutarak arada kalan kareleri adım sayısı ile ilişkilendirmiş ve $3A+4=K$ genellemesine ulaşmıştır. Adaylardan birinin genelleme süreci ayrıntılı olarak sunulmuştur.



Şekil 4. Çarpımsal yapıcı standart genelleme

- Geriçkarım** *Aral:* Şu köşelerdeki, şöyle işaret koyalım (koyu renkli karelerin içine çarpı işareti koyuyor). Bunları sabit tutarsak hani bir kare şeklinde düşündük diyelim, dört köşeli bir şekil. Köşelerdekini sabit tutalım, çünkü her adımda sadece şu ortadakiler büyütüyor şekli (daire içine alınmış kareler). Köşedekini sabit tutalım.
- Tümevarım** *Aral:* Bu dördümüz sabit, 1, 2, 3 (daire içindeki kareler) varmış. 1 iken bir tane daha artmış. Burada (1. adımda daire içindeki kareler) 1, 1, 1 burada (2. adımda) 2, 2, 2 burada (3. adımda) 3, 3, 3 adım sayısı ile doğru orantılı. Üç kol var gene. Nasıl buldun anlatır mısın?

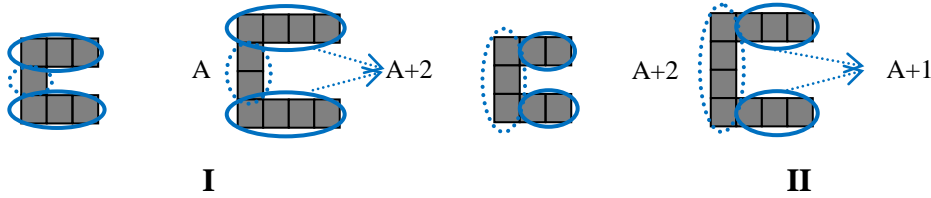
Araştırmacı: Bunu bulurken direkt şekilden düşündüm, şu köşeleri sabit tutmayı. Çünkü ilk

Aral: başta kapalı bir şekil olarak algıladığımı söylemiştim ya hani şurada da bir kare olsaydı (karenin çevresi biçiminde tamamladığını düşünüyor) yine şu köşedekiler değişmeyecekti. Çünkü her şeklin bir sonraki adımında birer kare eklenmiş ama her kola. Köşeleri sabit tutunca ortadakiler de adım sayısı kadar artıyor. O şekilde, şekilden gördüm.

Araştırmacı: Peki nasıl genelleyebilirsin?

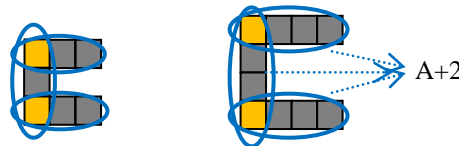
Genelleme Aral: Adım sayısına A dersek 4 artı $3A$ ($4+3A=K$ yazdı)

Çarpımsal yapıcı standart olmayan genelleme tipini kullanan öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğu Şekil 5'te I ve II olarak verilen iki farklı strateji kullanmışlardır. Adaylar I'de örüntünün yatay kollarını adım sayısının 2 fazlası, dikey kolunu ise adım sayısı ile ilişkilendirirken, II'de yatay kolları adım sayısının 1 fazlası, dikey kolu ise adım sayısının 2 fazlası ile ilişkilendirmişler, standart olmayan biçimdeki $A+2(A+2)=K$ ve $2(A+1)+(A+2)=K$ kurallarına ulaşmışlardır.



Şekil 5. Çarpımsal yapıcı standart olmayan genelleme

C örüntüsünü genellemede elde edilen önemli bir bulgu da kimi adayların yapıcı genellemelerin yanı sıra yapıyı çözücü, tamamlamaya-dayalı ve dönüşüme dayalı genellemelerini de kullanmalarındır. Lineer bir şekil örüntüsünün **yapıyı çözücü genellemesi** örüntünün her bir adımındaki şeklin üst üste gelen parçalarının yeniden düzenlenmesini ve ilişkilendirilmesi ifade eder. Bu çeşit genelleme şeklin iyi bir analizini gerektirir. Örneğin C örüntüsünde yapıyı çözücü bir genelleme yapan adaylar Şekil 6'da verilen örüntünün her bir kolunun eşit sayıda ve adım sayısından 2 fazla olduğunu fark etmiş, 2 köşedeki ortak sayılan kareleri çıkararak $3(A+2)-2=K$ genellemesine ulaşmışlardır. Adayın ayrıca geri çıkarım-tümevarım ve genelleme süreci ayrıntılı olarak sunulmuştur.



Şekil 6. Yapıyı çözücü genelleme

Geriçkarım**Cüneyt(C):**

Şimdi ilk şekilde 2 tane keşişim (açık renkli kareler) var diye düşündüm. Şurada da (2. adım) 2 tane var. Burada (3. adım) da 2 tane var. Şimdi bunlar yokmuş gibi düşündüm. Yani 3, 6, 9 şeklinde (1. adımda her bir koldaki kare sayıları toplamı).

Tümevarım

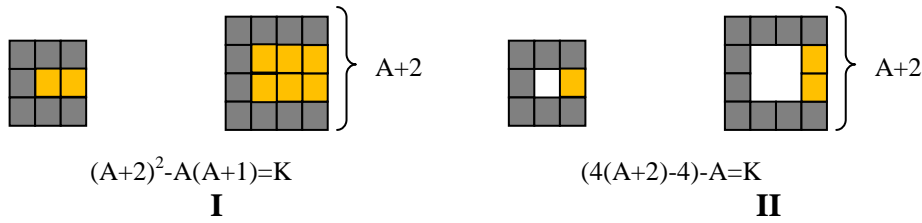
1. terimde bir tanesinde (bir kolda)3 tane var yani $A+2$ oluyor. Toplam 3 tane şekil var. 3 parantezinde A artı 2 ($3(A+2)$ yazdı), her birinde de 2 tane keşişim olduğu için 2 çıkarırsak $3(A+2)-2$ sonucu çıkar.

Genelleme**Araştırmacı(A):**

Emin misin?

C: Bakayım gene (yaptığı işlemleri şekle bakarak kontrol etti)**A:** Nasıl emin oldun?**C:** Şimdi 1. terim, A yerine 1 verirse 9'dan ($3.(1+2)$) 2 çıkarırsak 7 oldu. Aynı şekilde 2. için 10 oldu. 3. terim için 13, kare sayılarını verdi.

Lineer bir şekil örüntüsünün **tamamlamaya-dayalı genellemesi** örüntünün her bir adımındaki şeklin daha iyi bilinen ya da daha basit bir yapının bir parçası olarak düzenlenmesi olarak tanımlanabilir. Yapıyı çözücü ya da yapıcı olabilen bu genellemeye ilişkin öğretmen adaylarının iki farklı strateji kullandıkları görülmüştür. Bu stratejilerden biri olan kareye tamamlamada, adaylar C örüntüsünü kareye tamamlayarak karenin bir kenarını adım sayısının 2 fazlası ile ilişkilendirmişler, iç kısımda kalan karelerin (adım sayısı ve adım sayısının bir fazlasının çarpımının) çıkarılması ile $(A+2)^2 - A(A+1) = K$ genellemesine ulaşmışlardır. Adayların diğer genellemesinde de C örüntüsü karenin çevresi olacak şekilde tamamlanmış, karenin her bir kenarındaki kare sayılarından ortak ve eklenen karelerin çıkarılması ile $(4(A+2)-4) - A = K$ genellemesine ulaştıkları belirlenmiştir.

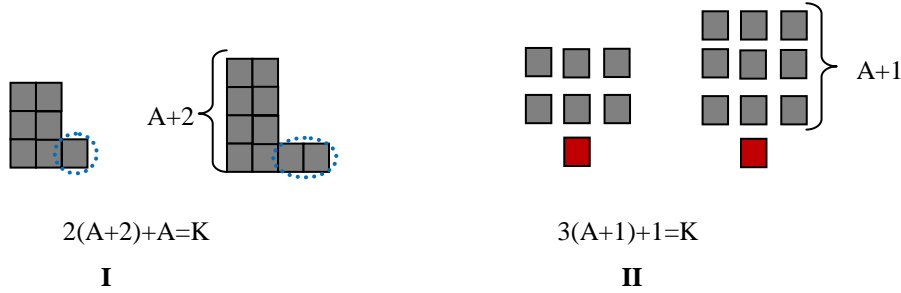


Şekil 7. Tamamlamaya-dayalı yapıcı/yapıyı çözücü genelleme

Şekil 7'de verilen I. stratejide C örüntüsündeki kare sayılarının hesaplanmasında karenin bütününden iç bölgesinde kalan kareler çıkarılmaktadır. Bu düşüncede kare ve iç bölgesi ayrı ayrı parçalar olarak ele alındığı için bu strateji yapıcı bir genellemedir. II. stratejide ise durum daha farklıdır. C örüntüsünün kareye tamamlanmasında karenin çevresi dikkate alındığı için her bir kenardaki kare sayılarının hesaplanmasında üst üste gelen ortak kareler söz konusudur. Bu nedenle de bu strateji yapıyı çözücü genelleme olarak ifade edilebilir.

Adaylardan dördü tarafından kullanılan son genelleme çeşidi dönüşüme-dayalı yapıcı/yapıyı çözücü genellemedir. Lineer bir şekil örüntüsünün **dönüşüme dayalı genellemesi** örüntünün her bir adımındaki şeklin daha tanıdık bir yapıya dönüştürülmesi için

şekli oluşturan parçaların hareket ettirilmesi ya da tekrar düzenlenmesi olarak tanımlanabilir. Yapıcı ya da yapıyı çözücü biçimlerde olabilen bu genellemeye ilişkin öğretmen adaylarının iki farklı genellemesi örnek olarak sunulabilir.



Şekil 8. Dönüşüme-dayalı yapıcı genelleme

Şekil 8-II'de verilen dönüşüme-dayalı genelleme sadece bir öğretmen adayı tarafından kullanılmış, görüşmesi örnek olarak sunulmuştur. Aday burada her bir koldaki kareleri bağımsız olarak düşünerek örüntüyü yeniden düzenlemiş, üçlü gruplandığında oluşan dikdörtgenin alanından yararlanarak artan kareyi eklemiştir. Adayın genelleme süreci de aşağıda sunulmuştur.

Geriçkarım Sibel(S): *Bir de 3 üzerinden gitmeye çalışayım dedim. 3, 3, 1 idi ya hocam (1. adımda yatay kollardaki kare sayısı: 3, 3, dikey kolda arada kalan 1 kareyi saydı). Daha farklı bir şekil çizdim. Alt alta görmem daha kolay olsun diye. Sayıları gruplamış oldum bu şekilde. Burda aslında 7, 10, 13 dü (her bir adımdaki toplam kare sayısı) bir şekilde 3'e göre parçalamış oldum. Şekle döktüm biraz da öğretim derslerinden kalan bir şeydi galiba.*

Tümevarım *Burada (1.adımda) 3'ler 2 iken, burada (2. adımda) 3 fazlalaşmış. Birer birer artmış. 4. Adım da ne olacaktı o zaman, üçlerimiz 5 tane olacaktı, 3 kere 5 15, bir de vardı elimizde 16.*

Araştırmacı(A): *Peki neden 3'lü grupladın? Neden 3 ile başladın?*

S: *Şurayı gördüğüm için (1. adımda yatay koldaki kare sayısının 3 olması) oradan yararlandım*

Genelleme A: *Peki. A. adım için?*

S: $1 \rightarrow 2.3+1$

$2 \rightarrow 3.3+1$

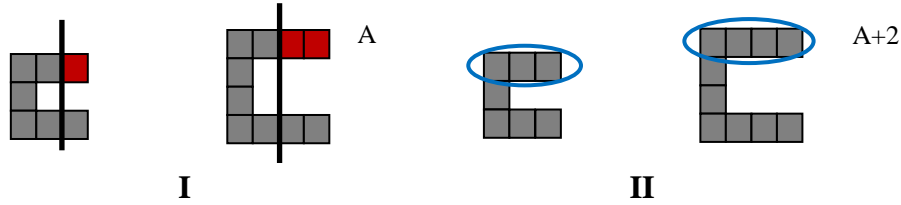
$A \rightarrow (A+1).3+1=K$

A: *Emin misin?*

S: *Burada 3ü baz almıştım. Ne oldu? Adım sayısının 1 fazlası ile çarpıp 1 ekledim (1. adım için $2.3+1$). Tekrar aynı şekilde (2. adım için $3.3+1$) yani adım sayımızın 1 fazlası çarpı 3 her birine her zaman da 1 ekledik. Böylelikle bulmuş olduk. $(A+1).3 + 1=K$ yazdı ve bu eşitliği $3A+4$ ile eşitledi.)*

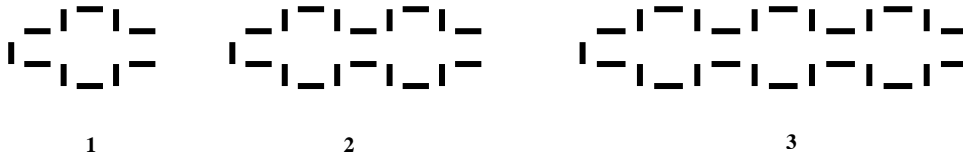
Paragmatik yaklaşım altında öğretmen adaylarının bazılarının (4 aday) C örüntüsünü genellemede farklı stratejiler kullandıkları görülmüştür. Adaylar C örüntüsündeki şekilsel ipuçlarını yakalamışlar, genellemede ise sayısal stratejilerinden yararlanarak $K=5+1(A-1)+2A$, $K=2+5+(A-1)3$, $K=5+2(A-1)+(A+1)$, $K=(A+2)+(2A+2)$ kurallarına ulaşmışlardır. Örneğin Şekil 9-I de sunulan stratejiyi kullanan aday çizdiği çizginin sağ tarafında kalan kareleri adım sayısı ile ilişkilendirirken, kalan kareler toplamını 5, 6, 7, 8 sayı örüntüsüne

dönüştürmüştür. Elde ettiği sayı örüntüsünü ise adım sayısı ile ilişkilendirmek için 5, 5+1, 5+1+1, 5+1+1+1 biçiminde parçalamış, toplanan birlerin adım sayısından 1 eksik olduğunu ifade ederek $K=5+1(A-1)+2A$ genellemesine ulaşmıştır. Şekil 9-II de sunulan stratejide ise aday daire içine alınan kareleri adım sayısının 2 fazlası ile ilişkilendirmiş, kalan kısım için t tablosu oluşturarak 4, 6, 8, 10 sayı örüntüsünün kuralını $2A+2$ olarak belirlemiş ve $K=(A+2)+(2A+2)$ genellemesine ulaşmıştır.



Şekil 9. Paragmatik yaklaşımdaki örnek stratejiler

Son görüşmelerde kullanılan diğer lineer şekil örüntüsü Şekil 10'da sunulan kibrit çöpü örüntüsüdür (Van de Walle, 2004). C örüntüsü için kullanılan sorulara benzer sorular sorulmuş, adaylardan adım sayısı (A) ile kibrit çöpü sayıları (K) arasındaki kuralı belirlemeleri istenmiştir.



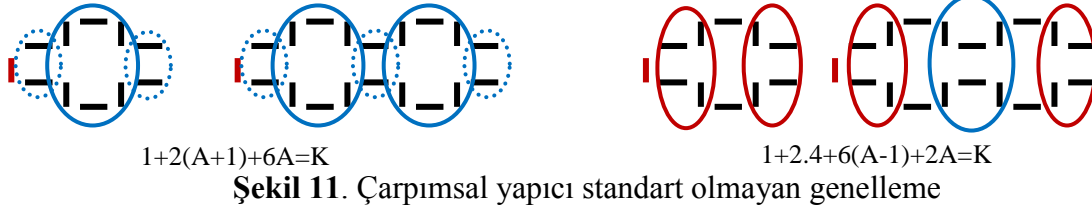
Şekil 10. Kibrit Çöpü Örüntüsü

Öğretmen adaylarının kibrit çöpü örüntüsüne ilişkin genellemelerinde C örüntüsünde olduğu gibi sayısal, görsel ve pragmatik olmak üzere üç yaklaşımı da kullandıkları görülmüştür. Sayısal yaklaşım altında sadece t tablosu temsilinin kullanıldığı fonksiyonel stratejiler öğretmen adaylarının dördü tarafından kullanılmıştır. Öğretmen adayları bu stratejiler ile $2(1+4A)+1=K$, $11+(A-1)8=K$ genellemelerine ulaşmışlardır.

Görsel yaklaşım altında öğretmen adaylarının tamamına yakınının C örüntüsünde olduğu gibi genellemede fonksiyonel stratejiler ve çeşitli genelleme tiplerini kullandıkları görülmüştür. Adayların genelleme tipleri Tablo 4'de sunulmuştur.

Kibrit çöpü örüntüsünde öğretmen adaylarının tamamına yakınının standart olmayan biçimdeki yapıcı genelleme tipini kullandıkları belirlenmiştir. Bu genelleme tipi kapsamında kullanılan stratejilerin birbirinden oldukça farklı ve sayıca fazla olması adayların şekli iyi analiz ettiklerinin ve görsel algılarının çeşitlendiğinin bir göstergesidir.

Standart olmayan çarpımsal yapıcı genelleme tipine ilişkin öğretmen adaylarının kullandıkları stratejilerden iki örnek Şekil 11’de sunulmuştur. “ $1+2(A+1)+6A=K$ ” genellemesine ulaşan öğretmen adayları ortada daire içine alınan 6 kibrit çöpünü adım sayısı ile bu çemberin yanındaki ikişerli kibrit çöplerini ise adım sayısının 1 fazlası ile ilişkilendirmişler ve baştaki kibrit çöpünü 1 sabit olarak eklemişlerdir.

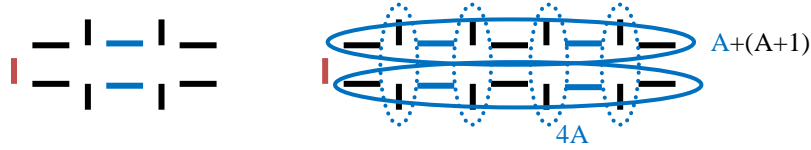


Tablo 4: Kibrit çöpü örüntüsüne ilişkin genelleme tipleri

Örüntü	Cebirsel Genelleme Tipleri	Cebirsel Kural	Kullanan aday sayısı (f)
Kibrit Çöpü Örüntüsü	<i>Toplamsal yapıcı standart olmayan</i>	$4A+1+4A+2=K$	2
	<i>Çarpımsal yapıcı standart</i>	$8A+3=K$	6
	<i>Çarpımsal yapıcı standart olmayan</i>	$2(4A)+3=K$	1
		$2(4A)+3=K$	1
		$1+(6A)+2(A+1)=K$	13
		$2(4A+1)+1=K$	1
		$2(4A+1)+1=K$	2
		$(2A.4)+3=K$	1
		$1+2[3A+(A+1)]=K$	1
		$11+8(A-1)=K$	2
		$2(3A+(A+1))+1=K$	1
		$4A+3=K(\text{yanlış}); 3(A+(A+1))+2A=K$	2
		$1+5.2+(4.2)(A-1)=K$	2
		$6(A-1)+2.4+2A+1=K$	1
		$3+6A+2A=K$	1
		$3+(2A.3)+2A=K$	1
		$2A+4(A+1)+2(A-1)+1=K$	1
	<i>Yapıyı çözücü</i>	$10A+1-2(A-1)=K$	3
		$1+2A.5-2(A-1)=K$	1
	<i>Tamamlamaya-dayalı yapıcı</i>	$[4+3(A-1)]3-A=K$	1
		$4[4+3(A-1)]-(1+4A)=K$	1
		$3(A+1)+6A-A=K$	1
	<i>Dönüşüme-dayalı yapıcı</i>	$2(A+(A+1))+4A+1=K$	1
		$3+8A=K$	1

Kibrit çöpü örüntüsüne ilişkin iki öğretmen adayında gözlenen genellemelerden biri de dönüşüme-dayalı genellemedir. Öğretmen adaylarından biri kibrit çöpü örüntüsünü Şekil 12’deki gibi dönüştürmüş, ilk baştaki çöpü sabit almış, yatay/dikey çöpleri ayrı ayrı gruplayarak adım sayısı ile ilişkilendirmiş ve standart olmayan biçimdeki $2(A+(A+1))+4A+1=K$ genellemesine ulaşmıştır. Burada yatay çöplerin iki grup biçiminde,

her bir grupta adım sayısı (açık renkli yatay çöpler) ve adım sayısının bir fazlası (siyah yatay çöpler) kadar kibrit çöpü bulunduğu düşünülebilir. Dikey çöpler ise adım sayısının dört katı biçimindedir. Adayın genelleme süreci ayrıntılı olarak sunulmuştur:

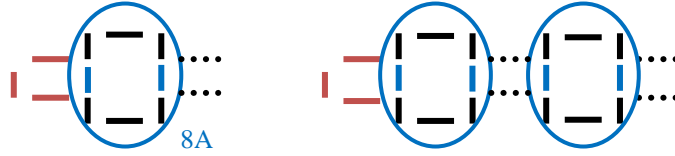


Şekil 12. Kibrit çöpü örüntüsünün dönüşüme-dayalı yapıcı genellemesi

- Geriçkarım** **Aral:** Şu dikdörtgendeki kenarları indirdiğim zaman ortaya (açık renkli yatay çöpler) adım sayısının iki fazlası kadar oluyor yatay çubuklar, onun da 2 katı, yani adım sayısının 2 fazlası kadar bir sırada 3 tane oluyor. (4. adım için gerekli yatay çubuklar için 6 yazdı) Dikdörtgende de 4 tane kalıyor. Yani 1. adımda bir tane dikdörtgen olduğu için 4 tane kalıyor. 2. adımda 8, 3. adımda da 12 tane (dikey çubuklar)
- Tümevarım**
- Araştırmacı:** Şimdi 1 saniye, şunları şuraya getirdin (açık renkli yatay çubukların ortaya taşınması), peki şuraya (daire içine alınan yatay grubun biri) ne dedin?
- Aral:** Bu yatay çubukları bulmak için adım sayısının 2 fazlası kadar bir sırada var.
- A:** Peki her adımda mı böyle?
- Geriçkarım** **Aral:** Bakalım. (diğer adımları da dönüştürerek grupladı) 2. Adımda 5 tane yatay çubuk oldu. (düşünüyor... $A+(A+1)$ yazdı).
- Tümevarım** Her seferinde bir tane adım sayısı kadar oluyor, bir de adım sayısının 1 fazlası kadar daha.
- A:** Gösterebilir misin?
- Aral:** Yani 1. adımda bir tane var (açık renkli yatay çubuk), bir de adım sayısının 1 fazlası kadar yani 2 tane daha geliyor. (siyah yatay çubuklar, $1+2$ yazdı) yani adım sayısı kadar sabit tuttuğumuzda diğeri adım sayısının bir fazlası oluyor. 2. adımda yine adım sayısı kadar sabit tuttuğumuzda 1 fazlası 3 tane oluyor ($2+3$ yazdı) 3. adımda yine adım sayısı kadar sabit tuttuğumuzda 1 fazlası 4 tane oluyor ($3+4$ yazdı) yataylar bir sıradaki, 2 sıra olduğu için çarpı 2
- A:** 4. adımdaki kibrit çöpü sayısı kaç olur?
- Aral:** $2(4+5)$, $18+16+1=35$. Otuz beş.
- A:** Bunları nasıl bulduğu açıklar mısınız?
- Aral:** Buradaki 18 yatay kibrit çöplerinden buldum. Adım sayısı 4 ve bir fazlasını topladığımızda bir sırada 9 tane kibrit çöpü varmış, 2 sıra olduğu için 18 tane kibrit çöpü var.
- A:** Güzel.
- Aral:** Bu 16 sayısını da dikdörtgenlere baktım. Bu kenarda her seferinde 4 tane oluyor. 1. adımda 1 tane dikdörtgen olduğunu düşünürsek, 1. adımda 4 tane, 2. adımda 8 tane, 3. adımda da 12 tane kibrit çöpü. E 4. adımda da dörder dörder gidiyor 16 tane kibrit çöpü oluyor, bu baştaki kibrit çöpü de her zaman sabit olduğu için 35.
- A:** 17. adım için gerekli kibrit çöpü sayısını bulabilir misin?
- Aral:** Baştaki kibrit çöpü sabit. Bir sırada adım sayısı ve adım sayısının 1 fazlası kadar, bir sırada var, 2 tane olduğu için 2 sıra 2 ile çarpıyoruz. Dikdörtgenin kenarlarında da her zaman 4 kibrit çöpü sabit oluyor. 1. Adımda bir tane var, 2. Adımda 2 tane dikdörtgen var. 3. Adımda 3. 17. Adımda da 17 çarpı 4 tane kibrit çöpü olur. 17 tane dikdörtgende her birinde dörder tane kalıyor. $(1+2(17+(17+1)))+(17 \times 4)=139$ yazdı(...)
- Genelleme** **A:** Adım sayısına A, kibrit çöpü sayısına K dersek A ile K arasındaki ilişkiyi bulabilir misin?
- Aral:** $2(A+(A+1))+4A+1=K$
 $2(2A+1)+4A+1=K$, $8A+3=K$
 Baştakini sabit tuttum. Yatay, dikdörtgeni oluşturan kenarlardan ikisini indirdim, yatay olanları ve burada bir sırada adım sayısı ve adım sayısının 1 fazlası kadar kibrit çöpü var. O da adım sayısı artı adım sayısı artı 1. İki sıra olduğu için 2 ile çarptım. Bu dikdörtgene baktığım zaman da 4 kibrit çöpü kalıyor dikdörtgende ve

dikdörtgenler adım sayısı kadar olduğu için 4 çarpı adım sayısı bir de artı 1, o da 8A artı 3.

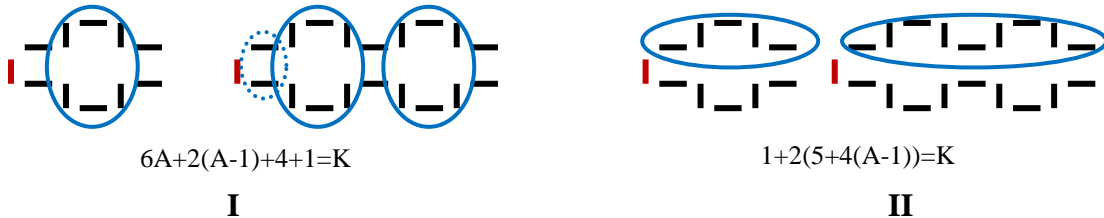
Dönüşüme dayalı genelleme tipini kullanan bir diğer öğretmen adayı ise Şekil 13’de görüldüğü gibi yatay konumdaki kibrit çöplerini (noktalı gösterilen) şekli dikdörtgene benzetmek için iç kısma taşımış, baştaki 3 kibrit çöpünü sabit alarak standart biçimdeki $3+8A=K$ genellemesine ulaşmıştır.



Şekil 13. Kibrit çöpü örüntüsünün dönüşüme-dayalı yapıcı genellemesi

Cebirsel genelleme tiplerine ait stratejilerin sayıca fazla olmasından dolayı Ek-2’de adayların ulaştıkları cebirsel kurallardan örnekler, görsel ipuçları ile birlikte sunulmuştur.

Öğretmen adaylarının yarısına yakını (7) kibrit çöpü örüntüsünde diğer yaklaşımların yanı sıra pragmatik yaklaşım altındaki stratejileri de kullanmışlardır. Adaylar bu örüntüdeki görsel ipuçlarını oldukça farklı biçimlerde yakalamışlar, bu ipuçlarını sayı örüntüsüne dönüştürdükten sonra birden fazla t tablosu oluşturarak genellemeye ulaşmışlardır. Örneğin Şekil 14-I de baştaki çöp sabit olmak üzere, daire içine alınmış dikdörtgenleri ve kalan yatay çöpleri fark eden aday dikdörtgenler için 6, 12, 18 ve yatay çöpler için 4, 6, 8, 10 sayı örüntülerini oluşturmuş ve her biri için ayrı ayrı t tablosu oluşturarak $6A$ (6×1 , 6×2 , 6×3) ve $2(A-1)+4$ (4 , $4+2$, $4+2+2$) kurallarını elde etmiş ve $6A+2(A-1)+4+1=K$ genellemesine ulaşmıştır. Şekil 14-II deki diğer aday ise şekil örüntüsünü simetrik olarak ele almış ve her bir gruptaki kibrit çöpü sayısını 5, 9, 13, 17 sayı örüntüsüne dönüştürerek t tablosu ile $1+2(5+4(A-1))=K$ kuralını elde etmiştir.



Şekil 14. Pragmatik yaklaşımdaki örnek stratejiler

Aritmetik Genelleme ve Olgunlaşmamış Tümevarım

Gerçekleştirilen son görüşmelerde sorulan her iki örüntü görevinde de aritmetik genelleme ya da olgunlaşmamış tümevarım muhakeme yapan öğretmen adayı ile karşılaşılmamıştır.

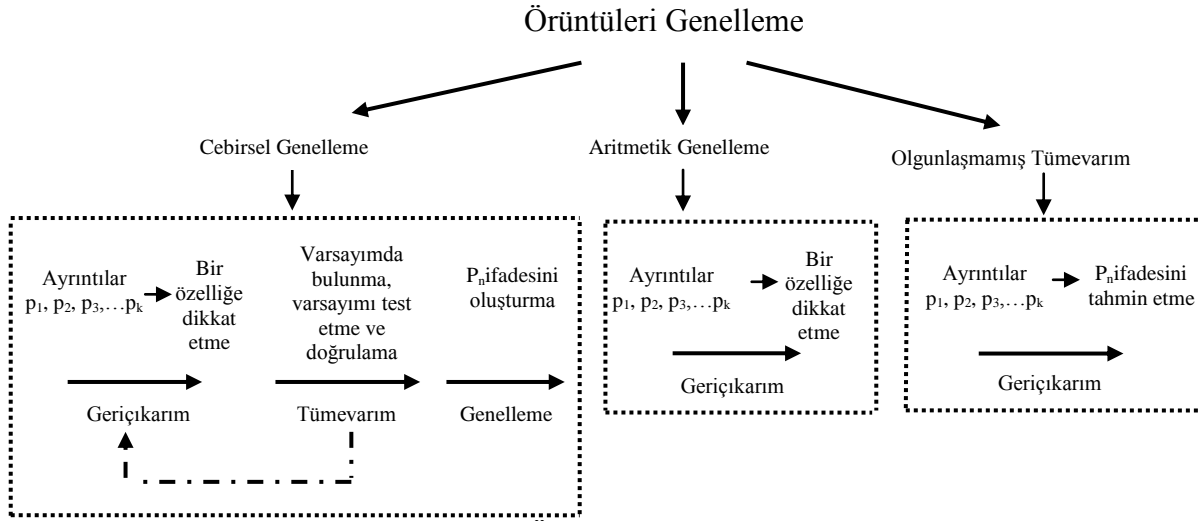
4. Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Örüntüleri genelleme pek çok araştırmacı tarafından cebirin bir rotası olarak görülmekte ve bu bağlamda örüntüleri genellemeye yönelik yapılan çalışmalar da cebirsel düşünmenin başlangıcı olarak savunulmaktadır. Radford (2006, 2008) cebirin ilk kez notasyon kullanımı ile başladığı varsayımının yapıldığını ancak cebirsel düşünmenin ortaya çıkışını anlamak için notasyon kullanımının en iyi yol olarak görülmediğini vurgular. Ona göre cebirsel düşünme sadece harfli ifadelerin kullanımı ile ilgili değildir, farklı yollar ile düşünmeyi gerektirir. O halde cebirsel düşünmenin ortaya çıkması sadece notasyon kullanımı ile açıklanamaz ise örüntüleri genellemenin bu noktadaki rolünün ne olduğu ve hangi durumlarda cebirsel düşünmeyi desteklediği sorularını akla getirmektedir. Bu bölümde gerçekleştirilen öğretim deneyi öncesi ve sonrası öğretmen adaylarının lineer şekil örüntülerini genelleme şemaları ve kullandıkları cebirsel genelleme tipleri, yaklaşımları ve stratejileri tartışılacaktır.

Öğretmen adaylarının örüntü genelleme şemaları

Öğretmen adaylarının örüntüleri genelleme şeması, cebirsel ve aritmetik genelleme arasındaki farklılığın ve olgunlaşmamış tümevarımın doğasının ve cebirsel genelleme sürecinde de geri çıkarım-tümevarım döngüsünün ortaya koyulması ile açıklanabilir. Bu bağlamda örüntüleri genelleme üzerine çalışan araştırmacıların (Radford, 2008; Rivera & Becker, 2007a; 2007b) tanımladıkları genelleme süreçleri incelenerek ve bu araştırmadan elde edilen bulgular da dikkate alınarak Şekil 15’de görülen örüntü genelleme şeması ortaya çıkarılmıştır. Bu şema incelendiğinde örüntüleri genelleme sürecinde cebirsel genelleme, aritmetik genelleme ve olgunlaşmamış tümevarım olmak üzere üç aşamalı süreç söz konusudur. Her üç sürecin ilk aşaması verilen örüntünün terimleri arasında var olan bir özelliğe ya da düzenliliğe dikkat ederek kesin olmayan bir çıkarımda bulunmadır. Daha sonraki aşamalar ise cebirsel, aritmetik genelleme ve olgunlaşmamış tümevarım süreçleri arasındaki farkı ortaya koymaktadır. Örüntünün terimleri arasındaki özelliğin farkına varılması ve buna ilişkin bir varsayımda bulunulması ve varsayımın doğruluğunun test edilip doğrulanmasıyla örüntünün tüm terimlerini bulmayı sağlayacak bir genellemeye ulaşılması cebirsel genellemeyi ifade etmektedir. Öte yandan örüntünün terimlerine ilişkin bir özelliğe dikkat çekme ancak bu özelliği örüntünün tüm terimlerini bulmayı sağlayacak şekilde genelleme yapamama ise aritmetik genellemeyi açıklar. MacGregor ve Stacey (1993) ile Radford’un (2008) da ifade ettiği gibi örüntüleri genellemede en büyük tehlike öğrencilerin deneme-yanılma ya da tahmine dayalı diğer bir deyişle olgunlaşmamış tümevarıma dayalı

muhakemede bulunmalarıdır. Bu muhakeme sonucunda her ne kadar sembolik genellemeye ulaşılsa da bu cebirsel bir nitelik taşımaz (Radford, 2006; 2008). Bu nedenle bu ayırımın çok iyi ortaya koyulması gerekir.



Bu çalışmada ön görüşmelerde cebirsel genellemeye ulaşan adayların yanı sıra aritmetik genelleme ve deneme-yanılma ya da tahminin ötesine geçemeyen çıkarımlarda bulunarak olgunlaşmamış tümevarıma dayalı genelleme yapan adaylara da rastlanmıştır. Bununla birlikte öğretim deneyi sonucunda gerçekleştirilen son görüşmelerde ise adayların hiç biri olgunlaşmamış tümevarıma dayalı muhakemede bulunmamışlardır. Bu durum adaylara örüntüleri cebirsel olarak genellemelerine yol açan uygun bir öğrenme ortamının sağlandığının bir göstergesidir. Geri çıkarım süreci bireylerin genellemelerini oluşturmaya nasıl başladıklarını tanımlamada yol göstericidir. Rivera ve Becker'ın (2007a; 2007b) da vurguladıkları gibi, matematiksel soyutlama ile ilişkili bilgi oluşumuna yol göstermede anlamlı geri çıkarım sürecinin gelişimi önemlidir. Bu bağlamda ön görüşmelerde aritmetik genelleme ve olgunlaşmamış tümevarım yapan adayların geri çıkarım süreçleri incelenerek, tümevarım sürecine geçememelerinin nedenleri öğretim deneyinin planlanmasında ve uygulanmasında etkili olmuştur. Bunun sonucu olarak son görüşmelerde adayların tamamı cebirsel genellemeye ulaşmış ve bu süreçte de daha kolay geri çıkarım ve tümevarım muhakemeler gerçekleştirerek farklı ve karmaşık cebirsel genellemelerinde bu döngüyü tekrar ve tekrar yinelemişlerdir. Ayrıca adaylar bu genelleme sürecinde farklı genelleme tipleri ve çeşitli yaklaşım ve stratejileri de kullanmışlardır.

Öğretmen adaylarının kullandıkları cebirsel genelleme tipleri, yaklaşımları ve stratejiler

Örüntüleri genelleme sürecinde kullanılan yaklaşımlar ve stratejiler dikkate alındığında, adaylar ön ve son görüşmelerde verilen lineer şekil örüntülerini genellemede sayısal ve görsel yaklaşımları kullanmışlardır. Farklı sınıf düzeyleri ve öğretmen adayları üzerinde ulusal ve uluslararası alanyazında gerçekleştirilen bazı çalışmalarda da benzer sonuçlara rastlanmıştır (Stacey, 1989; Garcia-Cruz & Martinon, 1997; Rivera & Becker, 2003, 2005; Becker & Rivera, 2005, 2006, Rivera, 2007a, 2007b; Rivera, 2010; Liang Chua & Hoyles, 2009; Tanışlı & Özdaş, 2009; Yeşildere & Akkoç, 2011; Tanışlı & Köse, 2011). Diğer taraftan Becker ve Rivera (2005), Liang Chua ve Hoyles (2009), Rivera (2010), Tanışlı ve Köse'nin (2011) çalışma sonuçlarında da gözlemlendiği gibi bazı adaylar da sayısal ve görsel yaklaşımın bir arada kullanıldığı pragmatik olarak adlandırılan yaklaşımı kullanmışlardır.

Öğretim deneyi öncesi gerçekleştirilen ön görüşmeler bu yaklaşımlar altında irdelendiğinde ise, adayların çoğunluğu sayısal yaklaşımı kullanarak şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştürme ve örüntünün terimleri arasındaki ortak farka odaklanarak bir önceki terimden bir sonraki terimi bulma (yinelemeli ilişki) eğilimi göstermişler, dolayısıyla örüntünün tüm terimlerini bulmayı sağlayacak bir varsayım oluşturamamışlar sadece aritmetik genellemede ya da olgunlaşmamış tümevarıma dayalı çıkarımda bulunmuşlardır. Bu sonuç öğretmen adayları üzerinde gerçekleştirilen Tanışlı ve Köse (2011) ile Yeşildere ve Akkoç'un (2011) araştırma sonuçları ile örtüşmektedir. Öğretim deneyinin sonunda gerçekleştirilen son görüşmelerde ise adaylar ağırlıklı olarak görsel yaklaşıma doğru bir eğilim göstermişler ve genellemelerini de daha çok ilişki (fonksiyonel ilişki) odaklı savunmuşlardır. Bu durum ön görüşmeler ile karşılaştırıldığında Rivera ve Becker (2008) ile Steele ve Johanning'in (2004) vurguladığı gibi adayların genellemelerini savunmalarının ve yorumlamalarının geliştiğinin bir göstergesidir. Adaylar genellemelerini savunurlarken görsel yaklaşımı kullananlar çoğunlukla ulaştıkları kuralların doğruluğunu verilen şekil üzerinden, sayısal ve pragmatik yaklaşımı kullananlar ise şekilsel ipuçlarından çıkardıkları verileri işledikleri t-tablosu üzerinden gerçekleştirmişlerdir. Ayrıca aynı örüntüyü genellemede ulaşılan farklı kuralların doğruluğunu bazı adaylar buldukları kuralları belli bir adım için test ederek, bazı adaylar ise bu kuralların eşitliğine vurgu yaparak savunmuşlardır.

Adayların örüntüleri genellemede kullandıkları genelleme tipleri incelendiğinde ise, ön görüşmelerde standart ve standart olmayan biçimlerde yapıcı genelleme tiplerini kullanan adaylar son görüşmelerde bu genelleme tiplerinin yanı sıra yapıyı çözücü, dönüşüme ve

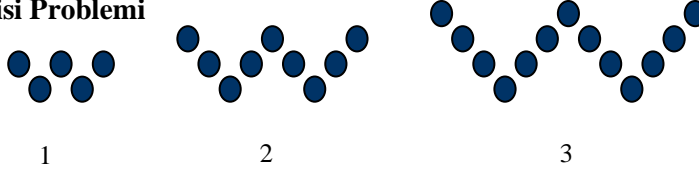
tamamlamaya dayalı genelleme tiplerini de kullanmışlardır. Bu sonuçlar “yapıyı çözücü, dönüşüme ve tamamlamaya dayalı genelleme tiplerinin kullanımının ne tür bir katkı getirdiği” sorusunu düşündürmektedir. Liang Chua ve Hoyles (2009) bu genelleme tiplerinin yapıcı genelleme tiplerine göre daha yönlü uzamsal bir görselleştirmeyi gerektirdiğini ifade ederler. Bu bağlamda düşünüldüğünde ise, gerçekleştirilen öğretim deneyinin adayların görsel algı gelişimlerine katkı sağladığı söylenebilir.

Sonuç olarak öğretmen adaylarının kullandıkları genelleme tipleri, yaklaşımları ve stratejileri göz önüne alındığında, öğretim deneyi sonucunda gerçekleştirilen son görüşmelerde, adayların genelleme tipleri ve stratejileri çeşitlenmiş, çoklu temsil kullanımları gelişmiş ve adaylar değişkenin bilinmeyen anlamından daha çok bağımlı-bağımsız anlamını keşfetmişlerdir. Ayrıca adayların son görüşmelerde genelleme stratejilerinin çeşitlenmesi bu bağlamda aynı örüntüye ilişkin çeşitli ve karmaşık genellemede bulunmaları öğretim deneyi sonucunda adayların görsel algılarının da geliştiğinin bir göstergesidir. Bu çalışmanın, öğretmen adaylarının örüntüleri cebirsel olarak genelleyebilme becerilerinin gelişimini sağladığı söylenebilir. Böylesi bir deneyim yaşayan öğretmen adaylarının profesyonel mesleki yaşantılarına bu deneyimlerini aktarmaları yetiştirecekleri öğrencilerinin cebirsel düşünme gelişimlerine katkı sağlaması açısından önemlidir. Bu önem doğrultusunda, öğretmen adaylarına öğretim derslerinde örüntüleri cebirsel olarak genellemeye ilişkin daha kapsamlı öğretimler gerçekleştirilmelidir. Aynı zamanda benzer bir çalışma öğretmenler üzerinde yürütülmeli, elde edilen sonuçlara dayalı olarak hizmet içi eğitimler verilmelidir.

EK-1

ÖĞRETİM SÜRECİNDE KULLANILAN GÖREV ÖRNEĞİ

W-Nokta Dizisi Problemi



6. Örüntüde kaç nokta var? Açıklayınız.
37. örüntüde kaç nokta var? Açıklayınız.
- n. örüntüde toplam nokta sayısı N için direk bir formül bulunuz. Yanıtı nasıl elde ettiğinizi açıklayınız. Formülü sayısal olarak elde ettiyseniz yukarıda verilen örüntü aracılığıyla formül hakkında ne düşünürsünüz?
- Ayşe n. örüntüdeki toplam nokta sayısı D için direk formülü $D=4(n+1)-3$ olarak elde etmiştir. Formül doğru mudur? Neden?/Neden değil? Formül doğru ise Ayşe formülü nasıl bulmuş olabilir? Hangi formül doğrudur: Senin mi yoksa Ayşe'nin mi? Açıklayınız.
- Yukarıdaki örüntüyü devam ettirdiğimizi düşünelim. Kaçınıcı adımda toplam nokta sayısı 73 olur. Yanıtı nasıl elde ettiğinizi açıklayınız.

KAYNAKÇA

- Amit, M., & Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM*, 40, 111-129.
- Akkan, Y., & Çakıroğlu, Ü. (2012) Doğrusal ve ikinci dereceden örüntüleri genelleştirme stratejileri: 6-8. sınıf öğrencilerinin karşılaştırılması, *Eğitim ve Bilim*, 37 (165), 104-120.
- Baş, S., Erbaş, A. K., & Çetinkaya, B. (2011). Öğretmenlerin dokuzuncu sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme yapılarıyla ilgili bilgileri, *Eğitim ve Bilim*, 36 (159), 41-55
- Becker, J.R., & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. In Chick, H.L. & Vincent, J.L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.4, pp. 121-128). Melbourne: PME.
- Becker, J.R., & Rivera, F. (2006). Sixth graders' figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra. In Alatorre, S., Cortina, J.L., Saiz, M., and Mendez, A. (Eds.). *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Merida, Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.
- Becker, J.R., & Rivera, F. (2007). Factors affecting seventh graders' cognitive perceptions of patterns involving constructive and deconstructive generalizations. In Woo, J.H., Lew, H.C., Park, K.S. & Seo, D.Y. (Eds.). *Proceedings of the 31th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.4, pp. 129-136). Seoul: PME.

- Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiment in collaboration with teachers. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp.307-333). London: Lawrence Erlbaum Associates Publishers
- Cobb, P., & Steffe, L. P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for research in mathematics education*, 14 (2), 83-94.
- Hargreaves, M., Shorrocks-Taylor, D., & Threlfall, J. (1998). Children's strategies with number patterns. *Educational Studies*, 24(3), 315-331.
- Garcia-Cruz, J.A., & Martinon, A. (1997). Actions and invariant schemata in linear generalizing problems. In E. Pehkonen (Ed.) *Proceeding of the 21th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol 2, pp. 289-296). University of Helsinki.
- İnönü, N. (2006). *Yeni bir çıkarım türü: Geri çıkarım*. Yayınlanmamış doktora tezi, İstanbul Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, İstanbul.
- Kelly, A. E., & Lesh, R. A. (2000). Teaching Experiments. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp.192-195). London: Lawrence Erlbaum Associates Publishers
- Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 231-258.
- Liang Chua, B., & Hoyles, C. (2009). Generalisation and perceptual agility: How did teachers fare in a quadratic generalising problem? In M. Joubert(Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* (pp.13-18), vol 29(2)
- MacGregor, M., & Stacey, K. (1993). Seeing a pattern and writing a rule. In I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu and F. Lin (Eds.), *Proceeding of The 17th Conference for Psychology of Mathematics Education*, 1, 181-188.
- MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 1-19.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for Research and Teaching* (pp. 65-86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Miles M., & Huberman, M. (1994). *An Expanded Sourcebook Qualitative Data Analysis* (2nd Ed.). California: Sage Publications.
- NCTM (2000). Curriculum and evaluation standards for school mathematics.[Online]: Retrieved on 14-September-2005, at URL: www.nctm.org/standards.html
- Olkun, S. ve Tanışlı, D. (2009). *Basitten Karmaşığa Örüntüler*. Ankara: Maya Akademi Yayınları.
- Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the Generalization of patterns: A semiotic perspective. In: S. Alstorre, J.L. Cortina, M. Saiz, & A. Mendez (Eds.). *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.1, pp. 2-21). Merida, Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.
- Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of form of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM*, 40: 83-96.

- Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, 73, 297-328.
- Rivera, F.D., & Becker, J.R. (2003). The effects of figural and numerical cues on the induction processes of preservice elementary mathematics teachers. In N. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA* (pp. 4-63-70). Honolulu, Hawai'i: University of Hawaii.
- Rivera, F., & Becker, J.R. (2005). Figural and numerical modes of generalizing in algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 11(4), 198-203.
- Rivera, F., & Becker, J.R. (2007a). Abduction-İnduction (generalization) processes of elementary majors on patterns in algebra. *Journal of Mathematical Behavior*, 26(2), 140-155.
- Rivera, F., & Becker, J.R. (2007b). Abduction in pattern generalization. In: Woo, J.H., Lew, H.C., Park, K.S. & Seo, D.Y. (Eds.). *Proceedings of the 31th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.4, pp. 97-104), Seoul: PME.
- Rivera, F.D., & Becker, J.R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM*, 40:65-82.
- Simon, M. A. (2000). Research on the Development of Mathematics Teachers: The Teacher Development Experiment. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp.335-359). London: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*. 20, 147-164.
- Steele, D.F. & Johanning, D.I. (2004). A Schematic-Theoretic View of Problem Solving and Development of Algebraic Thinking, *Educational Studies in Mathematics*, 57(1), 65-90.
- Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*. (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Tanışlı, D., & Özdaş, A. (2009). İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntüleri genellemede kullandıkları stratejiler. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, 9(3), 1453-1497.
- Tanışlı, D., & Köse, N. Y. (2011). Lineer şekil örüntülerine ilişkin genelleme stratejileri: Görsel ve sayısal ipuçlarının etkisi. *Eğitim ve Bilim*, 36 (160), 184-198.
- Wood, T., Cobb, P. & Yackel, E. (1990). The contextual nature of teaching: Mathematics and reading instruction in one second-grade classroom. *JSTOR: The Elementary School Journal*, 90(5), 497-513.
- Yeşildere, S., & Akkoç, H. (2011). Matematik öğretmen adaylarının şekil örüntülerini genelleme süreçleri, *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 30(II), 141-153.
- Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2003). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Sözkese Matbaacılık.